Esquema Matemáticas CCSS

4. Inferencia

Conocer el vocabulario básico de la Inferencia Estadística: población, individuos, muestra, tamaño de la población, tamaño de la muestra, muestreo aleatorio. Conocer algunos tipos de muestreo aleatorio: muestreo aleatorio simple y muestreo aleatorio estratificado.

- **Población**: es el conjunto de elementos de referencia sobre el que se realizan las observaciones
- **Individuos**: es cada uno de los elementos de la población
- **Muestra**: es un subconjunto de elementos de una población, suele usarse para estudiar dicha población cuando no puede estudiarse en su totalidad.
- **Tamaño** de la población y de la muestra: es la cantidad de individuos que hay, al tamaña de la muestra se le llama n.
- **Muestreo aleatorio simple:** la probabilidad de escoger a un individuo es igual de probable y se hace mediante el hacer.
- **Muestro aleatorio estratificado**: se definen diferentes estratos (por ejemplo, hombres y mujeres, ó niños, adultos y mayores) y se aplica la afijación proporcional. Se escogen los individuos dela muestra en la misma proporción que están en la población. (Se resuelve haciendo una tabla de proporcionalidad directa)

Conocer empíricamente la diferencia entre los valores de algunos parámetros estadísticos de la población y de las muestras (proporción, media).

La proporción es la cantidad de individuos que comparte una característica entre el tamaño de la muestra.

La media es la suma de las características numéricas de los individuos entre el tamaño de la muestra.

Conocer el Teorema Central del límite y aplicarlo para hallar la distribución de la media muestral de una muestra de gran tamaño, siempre que se conozca la desviación típica de la distribución de la variable aleatoria de la que procede la muestra.

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidad de una distribución con media μ y varianza σ^2, entonces, si n es suficientemente grande (mayor de 100), la variable aleatoria de la media tiene la siguiente distribución:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_1 \sim N(\bar{x}, \sigma/\sqrt{n})$$

Conocer la distribución en el muestreo de la media aritmética de las muestras de una población de la que se sabe que sigue una ley Normal. Aplicar el resultado anterior al cálculo de probabilidades de la media muestral, para el caso de poblaciones Normales con media y varianza conocidas.

Sea X una variable aleatoria, es decir, una variable a la cual en vez de asignarle nosotros un valor, obtenemos su resultado después de realizar un experimento aleatorio (como tirar un dado, o una moneda). Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, se escribe como: $X \sim N(\mu, \sigma)$

En dicho caso, para convertir la probabilidad de que X tome valores menores que k, en la distribución normal estándar, que es la de la tabla que nos dan en el examen, cuya variable aleatoria se llama Z, escribimos:

Siendo $Z \to N(0,1)$, tipificar es transformar la x en z mediante la fórmula: $z = \frac{k-\mu}{\sigma}$

Pero en selectividad se estudian muestras, no poblaciones. Y el problema que se intenta resolver la mayoría utiliza la media de la muestra, que se llama $\bar{x}$, ya que representa a un grupo pequeño, y no a todos, que es para lo que se usa la letra μ.

A parte del cambio de notación, queremos estudiar ahora cómo de bien se aproxima la media muestral, a la media poblacional, conocida la desviación típica de la población. De forma que la distribución de la media sigue una normal que depende del tamaño de la muestra n. a mayor tamaño, menor error al calcular la media de la muestra:

$$\bar{X} \sim N(\bar{x}, \sigma/\sqrt{n})$$

Con esta nueva notación cuando queremos tipificar la media la misma fórmula se convierte en

$$\bar{z} = \frac{\bar{k} - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Así dentro de un ejercicio quedaría:

$$P(\bar{X} \leq \bar{k}) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{k} - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\ (Z\ \leq\ \bar{z}) = \phi(\bar{z})$$

Por costumbre, no se suele indicar con la barra las distribuciones de la media, aunque matemáticamente es correcto y ayuda a una mejor comprensión de lo que se está haciendo.

Conocer cómo se distribuye, de manera aproximada, la proporción muestral para el caso de muestras de tamaño grande (no inferior a 100).

De manera análoga, podemos encontrarnos el mismo problema para una distribución binomial. La distribución binomial se caracteriza por ser discreta (toma un valor u otro, pero no valores intermedios) y además, se considera uno de los valores un éxito, y los demás valores un fracaso.

Por ejemplo, en la probabilidad de que al tirar un dado se tiene un éxito al sacar un 5 o un 6, la probabilidad de éxito será $\mathrm{p} = 2/6 = 1/3$, y la de fracaso será $q = 4/6 = 2/3$. Si este suceso se repite poscas veces calculamos la probabilidad de que se tenga éxito k veces con la función de probabilidad. Pero en selectividad siempre se usan tamaños de muestras grandes, que para selectividad se considera grande si el tamaño $n \geq 30$. En estos casos, la probabilidad de que haya k éxitos en n tiradas, se aproxima por una normal, y se escribe de esta forma: $X \sim B(n,p) \sim N(np, \sqrt{npq})$

Tipificando de la misma forma que en la norma, siendo la media de éxitos np, y la desviación típica $\sqrt{npq}$, $z = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

Y al igual que en el ejemplo anterior, tras realizar un experimento, obtenemos una cantidad de éxitos de la población y no de la muestra, así que usaremos la siguiente fórmula para calcular la proporción muestral:

$$\hat{p} = \frac{éxitos\ de\ la\ muestra}{n}$$

De forma que cuando queremos conocer cuál es la probabilidad de que la proporción de la población sea menor que un valor dado, tenemos una distribución de la forma:

$$\hat{X} \sim B\left(n, \frac{\hat{p}}{n}\right) \sim N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

Entonces tipificar se haría como:

$$\hat{z} = \frac{\hat{k} - \hat{p}}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}/\sqrt{n}}$$

De forma que para calcular la probabilidad de que la proporción de la muestra sea menor que un valor $\hat{k}$

$$P(\hat{X} \leq \hat{k}) = P\left(\frac{\hat{X} - \hat{p}}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}/\sqrt{n}} \leq \frac{\hat{k} - \hat{p}}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}/\sqrt{n}}\right) = P\ (Z\ \leq\ \hat{z}) = \phi(\hat{z})$$

Conocer el concepto de intervalo de confianza. A la vista de una situación real de carácter económico o social, modelizada por medio de una distribución Normal (con varianza conocida) o Binomial, el alumno debe saber:

Determinar un intervalo de confianza para la <u>media</u> de una población Normal con varianza conocida, a partir de una muestra aleatoria.

Un intervalo de confianza es averiguar los valores k_1, k_2, para los que la probabilidad de que la media se encuentre entre esos valores tenga una probabilidad concreta, normalmente un 90%, 95% o 98%, aunque puede hacerse con cualquier porcentaje. A este porcentaje se le llama Nivel de Confianza, y se denota por $1-\alpha$. Se usa esta forma de llamarlo porque en contraste de hipótesis se usa el α y se llama Nivel de Significación.

De esta manera nuestro intervalo de confianza $(\overline{k_1}, \overline{k_2})$, lo calculamos a partir de un entorno centrado en la media muestral, $E(\bar{x}, Error)$, esto nos hace falta para demostrar la fórmula, ya que al estar centrado en la media sabemos que $\frac{\overline{k_1}+\overline{k_2}}{2} = \bar{x}$, y renombrando $\bar{k} = \overline{k_2}$, $\overline{k_1} = 2\bar{x} - \bar{k}$ entonces planteamos el problema y resolvemos para obtener la fórmula:

$$P\left(\overline{k_1} \le \bar{X} \le \overline{k_2}\right) = P\left(\frac{\overline{k_1}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{k_2}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(-\frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z \le \frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$
$$= P\left(Z \le \frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - P\left(Z \le -\frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 2\,P\left(Z \le \frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - 1 = 1-\alpha$$

De esta fórmula es donde despejamos la ecuación

$$2\,P\left(Z \le \frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - 1 = 1-\alpha$$
$$2\,P\left(Z \le \frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha+1$$
$$P\left(Z \le \frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \frac{2-\alpha}{2}$$
$$\frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}} = \phi^{-}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\frac{\bar{k}-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$\bar{k}-\bar{x} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\bar{k} = \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

De aquí concluimos que los extremos del intervalo centrado en la media muestral es:

$$\overline{k_1} = 2\bar{x} - \bar{k} = \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{k_2} = \bar{k} = \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Y el intervalo de confianza es:

$$\boxed{\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

Análogamente, se puede calcular intervalos de confianza Unilaterales, que sirven para calcular cuando un valor es mayor o menor que uno dado. Al ser unilateral, no hace falta calcular el $1-\frac{\alpha}{2}$, solo el $1-\alpha$.

$\left(-\infty,\ \ \bar{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$

Determinar un intervalo de confianza para la proporción en una población, a partir de una muestra aleatoria grande.

La demostración es análoga, y sabiendo que $\bar{x} \sim \hat{p}$, y que $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$, la fórmula queda así:

$$\boxed{\left(\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \ \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)}$$

Al igual que con la Normal, los intervalos unilaterales serán con el $1-\alpha$ y quedan así.

$\left(-\infty,\ \ \hat{p} + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$	$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, +\infty\right)$

Determinar el tamaño muestral mínimo necesario para acotar el error cometido al estimar, por un intervalo de confianza, la proporción poblacional para cualquier valor dado del nivel de confianza.

El Error en el intervalo de confianza es lo que se le suma y se le resta a la media, es decir:

$Error\ de\ la\ Normal$:	$z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$Error\ de\ la\ Binomial$:	$z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

Determinar el tamaño muestral mínimo necesario para acotar el error cometido al estimar, por un intervalo de confianza, la media de una población Normal, con varianza conocida, para cualquier valor dado del nivel de confianza.

Y para averiguar el tamaño muestral, solo hay que despejar del error la n, a partir del error máximo que queramos cometer:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq Error$$

$$\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{Error} \leq \sqrt{n}$$

$$n \geq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{Error}$$

Calcular la media, varianza y desviación típica de un conjunto de valores dados, u obtenidos mediante muestreo.

Hay que diseñar una tabla con las columnas $\mathrm{x_i}$, $\mathrm{f_i}$, $\mathrm{x_i}f$, $\mathrm{x_i^2 f_i}$ y obtener las sumas de las columnas.

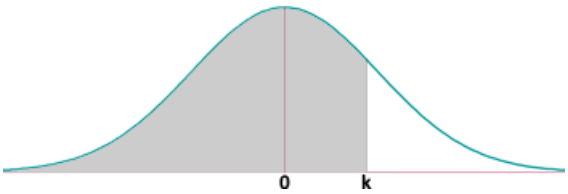
$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{\sum \mathrm{x_i f_i}}{\mathrm{n}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum \mathrm{x_i^2 f_i}}{\mathrm{n}} - \bar{\mathrm{x}}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Tabla de la distribución normal

La probabilidad de que en una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media cero y varianza 1, $Z \to N(0,1)$, se calcula con una integral que sólo puede resolverse mediante cálculo numérico y no con métodos algebraicos, esta es:



$$P(Z \leq k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767
2	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000

Ejercicios de Selectividad 4. Inferencia

Muestreo Aleatorio Simple (nueva pregunta Selectividad, antiguo 3)

a) Calcule la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de sus puntuaciones sea un múltiplo de 4.
SOCIALES II. 2015 RESERVA 3 EJERCICIO 3. OPCION A

Una persona lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas de 1 al 6.
a) Determine el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.
b) Sea A el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" y B el suceso "la primera puntuación es impar". Halle la probabilidad de A y la de B.
c) ¿Son independientes A y B?.
SOCIALES II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

Una caja contiene 12 bombillas, de las cuales 4 están fundidas. Se eligen, al azar y sin reemplazamiento, tres bombillas de esa caja.
a) Calcule la probabilidad de que ninguna de las tres bombillas esté fundida.
b) Calcule la probabilidad de que las tres bombillas estén fundidas.
SOCIALES II. 2008 RESERVA 2. EJERCICIO 3. PARTE I. OPCIÓN B

Un experimento aleatorio consiste en lanzar simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
a) Obtener dos unos.
b) Obtener al menos un dos.
c) Obtener dos números distintos.
d) Obtener una suma igual a cuatro.
SOCIALES II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 3. PARTE I. OPCIÓN B.

Laura tiene un dado con tres caras pintadas de azul y las otras tres de rojo. María tiene otro dado con tres caras pintadas de rojo, dos de verde y una de azul. Cada una tira su dado y observan el color.
a) Describa el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.
b) Si salen los dos colores iguales gana Laura; y si sale el color verde, gana María. Calcule la probabilidad que tiene cada una de ganar.
SOCIALES II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. PARTE I. OPCIÓN A

María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado, si en los dos dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.
a) Calcule la probabilidad de que gane Laura.
b) Calcule la probabilidad de que gane María.
SOCIALES II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 3. PARTE I. OPCIÓN A

Consideramos el experimento aleatorio de lanzar dos dados distintos y anotar el producto de sus puntuaciones.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho producto sea igual a 6?.
b) Si sabemos que el producto ha sido 4, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido los dos dados con la misma puntuación?.
SOCIALES II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. PARTE I. OPCIÓN A

Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos.
a) Determine el espacio muestral asociado al experimento.
b) Calcule la probabilidad de que no escriban la misma vocal.
SOCIALES II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 3. PARTE I. OPCIÓN A

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:
A: "sacar al menos una cara y una cruz".
B: "sacar a lo sumo una cara".
a) Determine el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.
b) ¿Son independientes ambos sucesos?.
SOCIALES II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 3. PARTE I. OPCIÓN B

a) Se considera la población $\{2,4,6\}$. Escriba todas las posibles muestras de tamaño dos elegidas mediante muestreo aleatorio simple y determine la desviación típica de las medias muestrales.
b) En una ciudad se seleccionó una muestra aleatoria de 500 alumnos de Bachillerato a los que se les preguntó si poseían una determinada marca de teléfono móvil, resultando que 80 de ellos contestaron afirmativamente. Obtenga un intervalo de confianza, al 92%, para estimar la proporción de estudiantes de Bachillerato que poseen esa marca de teléfono móvil.
SOCIALES II. 2013 RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

a) La altura de los alumnos de una Universidad sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 11 cm. Calcule el tamaño mínimo que ha de tener una muestra aleatoria de esos alumnos para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 1 cm, con un nivel de confianza del 98%.
b) Dada la población {10, 12, 17}, escriba todas las muestras de tamaño 2 mediante muestreo aleatorio simple y calcule la media y la desviación típica de las medias muestrales.
SOCIALES II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

Escriba todas las muestras de tamaño 2 que, mediante muestreo aleatorio simple (con reemplazamiento), se pueden extraer del conjunto $\{8,10,12\}$ y determine el valor de la varianza de las medias de esas muestras.
SOCIALES II. 2009 RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

Sea la población de elementos {22, 24, 26}
a) Escriba todas las muestras posibles de tamaño 2, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.
b) Calcule la varianza de la población.
c) Calcule la varianza de las medias muestrales.
SOCIALES II. 2005 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

Dada la población de elementos {3, 4, 5, 8}, se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento.
a) Escriba todas las muestras posibles.
b) Calcule la varianza de la población.
c) Calcule la varianza de las medias muestrales.
SOCIALES II. 2004 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

Muestreo Aleatorio Estratificado con afijación Proporcional

a) La talla de los individuos de una población sigue una distribución Normal con desviación típica 8 cm y media desconocida. A partir de una muestra aleatoria se ha obtenido un intervalo de confianza al 95% para estimar la talla media poblacional, que ha resultado ser (164.86 , 171.14) en cm.

Calcule la talla media de la muestra y el tamaño muestral mínimo necesario para reducir a la mitad el error máximo de estimación anterior.
b) En un club privado con 243 usuarios se ha seleccionado una muestra para hacer un sondeo, según la actividad realizada y por muestreo aleatorio estratificado. En esa muestra, 5 usuarios practican Yoga, 7 Pilates y 15 Mantenimiento, ¿cuántos usuarios están inscritos en cada actividad en ese club?
SOCIALES II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCION A

a) Se desea tomar una muestra aleatoria estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 46 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7500 personas, en el segundo hay 8400, en el tercero 5700 y en el cuarto 3000. Calcule el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido al azar 375 personas del primer estrato.
b) Dada la población $\{2,4,6\}$ construya todas las muestras posibles de tamaño 2, que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.
SOCIALES II. 2016 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

a) Determine todas las muestras de tamaño 2 que, mediante un muestreo aleatorio simple, se pueden extraer del conjunto {6,9,12} y calcule la varianza de las medias muestrales.
b) Una empresa fabrica cuatro productos A, B, C y D, de los que elabora diariamente 40, 15, 25 y 120 unidades respectivamente.
Si un día se quiere elaborar una muestra de 40 unidades con los productos fabricados, por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿qué número de unidades de cada producto se debe elegir?
SOCIALES II. 2014 RESERVA 1. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

1) En un centro docente la tercera parte de los alumnos estudia el idioma A, la mitad el idioma B y el resto el idioma C (cada alumno estudia sólo uno de estos idiomas).
a) Se desea seleccionar una muestra de 60 alumnos, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional al número de los alumnos de cada idioma. ¿Cómo debería estar conformada la muestra?
b) En otra muestra seleccionada por el procedimiento anterior, el número de alumnos tomados del idioma A es 14. Determine cuántos se han elegido de los otros dos idiomas.
2) Una población tiene 5 elementos. Mediante muestreo aleatorio simple se seleccionan muestras de tamaño 3, siendo la desviación típica de sus medias 2 y la media de las medias muestrales 7. ¿Cuánto valen la media y la varianza de la población?
SOCIALES II. 2014 RESERVA 3. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

a) Una población de 6000 personas se ha dividido en 3 estratos, uno con 1000 personas, otro con 3500 y otro con 1500. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 15 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.
b) Dada la población $\{1,4,7\}$, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que puedan formarse mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas esas muestras.
SOCIALES II. 2013 RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

a) En una ciudad viven 400 hombres y 320 mujeres y se quiere seleccionar una muestra de tamaño 54 utilizando muestreo estratificado por sexos, con afijación proporcional, ¿cuál sería la composición de la muestra?.
b) A partir de una población de elementos 1, 2, 3, 4 se seleccionan, mediante muestreo aleatorio simple, todas las muestras de tamaño 2. Escriba dichas muestras y calcule la varianza de las medias muestrales.
SOCIALES II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

a) Una población de tamaño 1000 se ha dividido en 4 estratos de tamaño 150, 400, 250 y 200. Utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 10 individuos del tercer estrato, ¿cuál es el tamaño de la muestra?
b) El peso de los individuos de una población se distribuye según una ley Normal de desviación típica 6 kg. Calcule el tamaño mínimo de la muestra para estimar, con un nivel de confianza del 95%, el peso medio en la población con un error no superior a 1 kg.
SOCIALES II. 2011 JUNIO. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

a) En una población de 2000 hombres y 2500 mujeres se quiere seleccionar una muestra de 135 personas mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿cuál sería la composición de la muestra?.
b) Dada la población { 6, 8, 11, *a* }, ¿cuánto debe valer *a* sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 10.3?
SOCIALES II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

a) En una población, una variable aleatoria X sigue una distribución Normal de media 50 y desviación típica 9. Se elige al azar, una muestra de tamaño 64 de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral está comprendida entre 48 y 52?.
b) En una empresa de gas trabajan 150 personas en mantenimiento, 450 en operaciones, 200 en servicios y 100 en cargos directivos. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores de esa empresa por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿qué número de trabajadores se debe elegir de cada grupo?.
SOCIALES II. 2009 RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

Intervalos Normal

Se desea estimar la media de una variable aleatoria Normal cuya desviación típica es 2'5. Para ello, se toma una muestra aleatoria, obteniéndose los siguientes resultados:

18 18'5 14 16'5 19 20 20'5 17 18'5 18.

a) Determine un intervalo de confianza al 96% para la media poblacional.
b) ¿Cuál es el error máximo cometido con esta estimación?.
c) Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error máximo sea inferior a 1, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?.
SOCIALES II. 2016 JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

El número de pulsaciones por minuto (p/m) de los pacientes de un centro de salud de una cierta población sigue una ley Normal de desviación típica 9.
a) Se elige una muestra aleatoria de 100 pacientes que da como número medio de (p/m) 68. Con un nivel del 97%, determine un intervalo de confianza para el número medio de las p/m de los pacientes de ese centro.
b) Con el mismo nivel de confianza, ¿cuántos pacientes, como mínimo, se necesitan en la muestra para estimar el número medio de p/m con un error no superior a 1?.
SOCIALES II. 2016 RESERVA 1. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

El peso de los paquetes de azúcar de una marca, medido en gramos, sigue una distribución Normal con desviación típica de 16 gramos. A partir de una muestra de 100 paquetes de azúcar de dicha marca, se obtuvo un peso medio de 247 gramos.
a) Obtenga un intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de azúcar de esa marca, con un nivel de confianza del 97%.
b) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el peso medio con un error máximo de 0.5 gramos, a un nivel de confianza del 95%.
SOCIALES II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCION B

Para estudiar el número de personas que van al cine mensualmente en una ciudad, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 meses y se ha registrado el número de entradas al cine vendidas en cada mes. Los datos son los siguientes:

682 553 555 666 657 649 522 568 700 552

a) Suponiendo que el número de entradas vendidas mensualmente sigue una distribución Normal con desviación típica 50 entradas, calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 95%, para el número medio de personas que van al cine mensualmente en esa ciudad.

b) ¿Cuál es el error máximo que se comete al estimar esta media con este intervalo?

SOCIALES II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCION A

Un fabricante de tuberías PVC sabe que la distribución de los diámetros interiores de los tubos de conducción de agua que produce sigue una ley Normal con varianza $\sigma^2 = 0.25\ mm^2$. Para estimar el diámetro medio de esas tuberías, toma una muestra aleatoria de 64 tubos y comprueba que el diámetro medio de esa muestra es de 20 *mm*.

a) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la media de los diámetros de los tubos que fabrica.

b) Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa distribución para que la amplitud de un intervalo de confianza, con ese mismo nivel de confianza, sea inferior a 2 *mm*.

SOCIALES II. 2015 JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

El tiempo en horas dedicado cada día al uso de una aplicación de mensajería instantánea por los estudiantes de bachillerato de una ciudad, es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 0.5 horas. Se toma una muestra aleatoria de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos de uso en horas:

3.5 4.25 2.25 3.75 4.2 2.75 1.25 1.2 1.75 2.1

a) Determine un intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio diario dedicado al uso de esta aplicación por los estudiantes.

b) Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el tiempo medio diario dedicado al uso de esta aplicación, para un error de estimación no superior a 0.1 horas y mismo nivel de confianza anterior.

SOCIALES II. 2015 RESERVA 1 EJERCICIO 4. OPCION B

De una población Normal de media desconocida y desviación típica 2 se extrae la siguiente muestra aleatoria simple de tamaño 10:

3.8 6.3 4.3 6 6.2 5.8 1.5 3.3 3.4 2.9

a) Estime, mediante un intervalo de confianza, la media poblacional para un nivel de confianza del 92%. Obtenga su error de estimación.

b) ¿Qué tamaño muestral mínimo sería necesario para reducir ese error a la mitad, con el mismo nivel de confianza?

SOCIALES II. 2015 RESERVA 3 EJERCICIO 4. OPCION B

El capital de las hipotecas constituidas sobre fincas urbanas en Andalucía es una variable aleatoria Normal con desviación típica 10000 €.
a) Se toma una muestra aleatoria de 9 hipotecas con los siguientes capitales (en euros):

95000 99000 105000 106000 108000 111000 112000 115000 120000

Construya un intervalo de confianza, al 95%, para el capital medio de dichas hipotecas.
b) ¿Qué número mínimo de hipotecas deberíamos considerar en una muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo en la estimación del capital medio sea de 4000€?
SOCIALES II. 2015 RESERVA 4 EJERCICIO 4. OPCION A

En una muestra aleatoria de 100 botellas de agua mineral se encontró un contenido medio de 48 cl. Sabiendo que la variable "contenido de agua en una botella" sigue una ley Normal con desviación típica 5 cl, determine un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza de 95 %
b) ¿Qué tamaño muestral mínimo debería considerarse para estimar esta media con el mismo nivel de confianza y un error inferior a 0'5 cl?
SOCIALES II. 2015 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

Se quiere hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de narrativa que se venden en la actualidad. Para ello se elige una muestra aleatoria de 121 libros, encontrando que tienen un precio medio de 23 €. Se sabe que el precio de los libros de narrativa sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 5 €.
a) Obtenga un intervalo de confianza al 98'8 %, para el precio medio de esos libros.
b) ¿Cuántos libros habría que elegir como muestra para que, con la misma confianza, el error máximo de la estimación no excediera de 1 €?.
SOCIALES II. 2014 JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

Una panadería produce barras de pan cuya longitud, medida en centímetros, sigue una distribución Normal con una desviación típica de 5 centímetros.
a) A partir de una muestra de 100 barras de pan se ha calculado el intervalo de confianza para la media poblacional, resultando ser (31.2, 33.4). Halle la media muestral y el error de estimación.
b) Para un nivel de confianza del 96%, halle el tamaño muestral mínimo necesario para que el error de estimación máximo sea 1.5.
SOCIALES II. 2014 RESERVA 2. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

Con el fin de estudiar el precio medio del litro de gasolina en una provincia en un determinado día, se seleccionan al azar ese día 9 estaciones de servicio y se observan los siguientes precios, en euros, de un litro de gasolina:

1.3, 1.2, 1.4, 1.27, 1.25, 1.32, 1.37, 1.38, 1.23.

Se sabe que el precio del litro de gasolina se distribuye según una ley Normal con desviación típica igual a 0.18 euros.
a) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para estimar el precio medio del litro de gasolina.
b) Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el precio medio del litro de gasolina con un error no superior a 0.08 euros, con el mismo nivel de confianza.
SOCIALES II. 2014 RESERVA 3. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

El peso de los huevos de una granja sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 1.23 gramos. Para estimar la media poblacional se ha tomado una muestra de dos docenas de huevos que han dado un peso total de 1615.2 gramos.
a) Halle un intervalo de confianza, al 96%, para la media poblacional.
b) Con el mismo nivel de confianza anterior, si nos exigieran que el intervalo tuviera una amplitud máxima de 0.8, ¿de qué tamaño, como mínimo, habría que tomar la muestra?.
SOCIALES II. 2014 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

Intervalos Binomial

Una cadena de hipermercados decide estudiar la proporción de artículos de un determinado tipo que tienen defectos en su envoltorio. Para ello, selecciona aleatoriamente 2000 artículos de este tipo entre sus hipermercados y encuentra que 19 de ellos tienen defectos en su envoltorio.
a) Determine un intervalo, al 95% de confianza, para la proporción real de artículos con este tipo de defecto e interprete el resultado obtenido.
b) ¿Cuántos artículos, como mínimo, deberá seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 1%?.
SOCIALES II. 2016 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

Se ha lanzado un dado 400 veces, y en 72 de ellas ha salido un tres.
a) Calcule un intervalo de confianza, al 99.2%, para la proporción de veces que se obtiene un tres.
b) Calcule el error máximo admisible cometido con ese intervalo.
SOCIALES II. 2015 RESERVA 2 EJERCICIO 4. OPCION B

Para estimar la proporción de balances contables incorrectos de un banco, se seleccionan aleatoriamente 200 balances, y se encuentran que 19 de ellos son incorrectos.
a) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la proporción de balances incorrectos.
b) ¿Cuántos balances se deberán seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, el error de la estimación no sea superior a 0'02?
SOCIALES II. 2014 RESERVA 1. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

Para estimar la proporción de habitantes que es favorable a la construcción de un centro comercial en un municipio, se ha obtenido el intervalo de confianza (0.31, 0.39), al 94%.
a) ¿Cuál ha sido el valor de la proporción muestral?
b) Si la muestra aleatoria elegida de esa población para el estudio fue de 500 personas, ¿cuántas de ellas deseaban la construcción del centro comercial?
c) Se desea repetir el estudio para obtener un intervalo de confianza con un error máximo de 0.03 y el mismo nivel de confianza. ¿Cuántas personas, como mínimo, debe tener la nueva muestra aleatoria?
SOCIALES II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella hay 175 hembras.
a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94%.
b) A la vista del resultado del muestreo se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 0.02, ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?.
SOCIALES II. 2013 JUNIO. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

En una población próxima a un puerto deportivo se quiere estimar la proporción de habitantes que navegan al menos una vez a la semana. Se toma una muestra, al azar, de 400 habitantes de la población, de los que 160 afirman navegar al menos una vez en semana.
a) Halle el intervalo de confianza del 90% para la proporción de habitantes que navegan al menos una vez en semana.
b) A la vista del resultado, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota del error de 0'1 con el mismo nivel de confianza del apartado anterior. ¿Cuántos individuos debe tener al menos la muestra?
SOCIALES II. 2013 RESERVA 1. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

De una muestra aleatoria de 120 alumnos presentados a las Pruebas de Acceso, sólo 15 han resultado no aptos.
a) Calcule un intervalo de confianza, al 99%, para estimar la proporción de alumnos que han resultado aptos en dicha prueba.
b) Manteniendo la misma confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción de alumnos aptos, cometiendo un error inferior al 5%?.
SOCIALES II. 2012 JUNIO. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

Tipificar

El peso de los habitantes de una determinada ciudad sigue un ley Normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg.
a) ¿Qué distribución sigue la media de los pesos de las muestras de habitantes de tamaño 64 extraídas de esa ciudad?.
b) Si se extrae una muestra aleatoria de tamaño 100 de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de esa muestra está comprendido entre 64 y 65 kg?.
SOCIALES II. 2016 JUNIO. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

El peso de los adultos de una determinada población sigue una distribución Normal de media 70 Kg y desviación típica 16 Kg. Si elegimos, al azar, muestras de tamaño 4,
a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una de esas muestras esté comprendido entre 65 y 72 Kg?.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ese peso medio sea menor que 70 Kg?.
SOCIALES II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

Sea X una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4. Se toman muestras de tamaño 16.
a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral.
b) Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 47.5 y 52.5?.
SOCIALES II. 2011 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley Normal de media 36 y desviación típica 4'8.
a) Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?.
b) ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?.
SOCIALES II. 2007 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

Un fabricante produce tabletas de chocolate cuyo peso en gramos sigue una ley Normal de media 125 g y desviación típica 4 g.
a) Si las tabletas se empaquetan en lotes de 25, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de las tabletas de un lote se encuentre entre 124 y 126 gramos?
b) Si los lotes fuesen de 64 tabletas, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de las tabletas del lote superase los 124 gramos?
SOCIALES II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

Sea *X* una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4.
a) Para muestras de tamaño 4, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral supere el valor 54?
b) Si $\overline{X}_{16}$ indica la variable aleatoria "media muestral para muestras de tamaño 16", calcule el valor de *a* para que $P(50-a \le \overline{X}_{16} \le 50+a) = 0'9876$
SOCIALES II. 2005 RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

El número de horas semanales que los adolescentes dedican a ver la televisión se distribuye según una ley Normal de media 9 horas y desviación típica 4. Para muestras de 64 adolescentes:
a) Indique cuál es la distribución de las medias muestrales.
b) Calcule la probabilidad de que la media de una de las muestras esté comprendida entre 7'8 y 9'5 horas.
SOCIALES II. 2005 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

Una empresa de teléfonos móviles ha hecho un estudio sobre el tiempo que tardan sus baterías en descargarse, llegando a la conclusión de que dicha duración, en días, sigue una ley Normal de media 3.8 y desviación típica 1.
Se toma una muestra de 16 móviles de esta empresa. Halle la probabilidad de que:
a) La duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 4.1 y 4.3 días.
b) La duración media de las baterías de la muestra sea inferior a 3.35 días.
SOCIALES II. 2004 RESERVA 1. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

La superficie de las parcelas de una determinada provincia se distribuye según una ley Normal con media 2.9 Ha y desviación típica 0.6 Ha.
a) Indique la distribución de las medias muestrales para muestras de tamaño 169.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de tamaño 169 tenga una superficie media comprendida entre 2.8 y 3 Ha?
SOCIALES II. 2004 RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A