

Esquema Matemáticas II

4. Geometría

4.1 Realiza operaciones elementales con vectores en el espacio. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.

4.2 Conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Conoce que tres vectores en un espacio de dimensión tres son linealmente dependientes si y sólo si el determinante es cero.

4.3 Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas (paramétrica, continua e implícita), pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

4.4 Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas (paramétrica, general o implícita), pasando de una a otra correctamente.

4.5 Determina un punto, una recta o un plano a partir de propiedades que los definan (por ejemplo: el punto simétrico de otro con respecto a un tercero, la recta que pasa por dos puntos o el plano que contiene a tres puntos o a un punto y una recta, etc.).

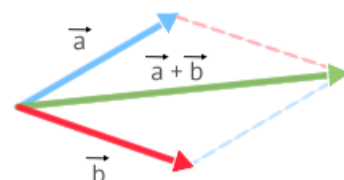
4.6 Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. Plantea, interpreta y resuelve problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos.

4.7 Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos: distancias entre puntos y rectas y planos, simetrías axiales, ángulos entre rectas y planos, vectores normales a un plano, perpendicular común a dos rectas, vector perpendicular a otros dos, áreas de triángulos y paralelogramos y volúmenes de tetraedros y paralelepípedos.

4.1 Realiza operaciones elementales con vectores en el espacio. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.

Nos referimos en este caso a operaciones de vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$. Se utilizarán las letras en mayúscula A, B, C, D para los vértices de un polígono, las letras P, Q, $\mathcal{P}$ (rho), Φ (phi) cuando tenemos puntos sueltos. Para los vectores directores usaremos $\vec{d}, \vec{\delta}$ (delta) y para los vectores normales (o perpendiculares) $\vec{n}, \vec{\eta}$ (eta). Para los demás vectores usaremos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Los vectores se pueden sumar y restar coordenada a coordenada. La suma se puede representar con un paralelogramo, de forma que para calcular la suma de dos vectores es poner el principio de uno al final del otro. Restarlo es sumar por el vector opuesto, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



$$(1,2,3) + (4,5,6) = (5,7,9)$$

Los vectores se pueden multiplicar por un número delante de ellos, multiplicando cada uno de los elementos por ese número:

$$5\vec{u} = 5(1,2,3) = (5,10,15)$$

Se puede calcular cuánto mide un vector, usando el teorema de Pitágoras para 3 dimensiones, se le llama **módulo** a su tamaño y se indica entre dos barras verticales, las mismas que se usan para el valor absoluto:

$$|\vec{u}| = |1,2,3| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Todas estas operaciones con vectores, se pueden adaptar a los puntos. Pero los puntos son los puntos, y los vectores son vectores, y aunque no tiene sentido sumar puntos, como los puntos y los vectores se llevan bien (son un automorfismo), se relacionan mediante esta fórmula:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

Expandiendo la resta entre puntos como se hace con vectores, siendo $Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$. De esta fórmula despejando la Q, aunque la fórmula aparentemente no cambia mucho, leyéndola se puede entender que un punto se calcula a partir de otro desplazando el punto con un vector:

$$Q = P + \overrightarrow{PQ}$$

Operaciones básicas puntos y vectores

Encontrar el punto medio M entre dos puntos P y Q

$$M = \frac{P + Q}{2}$$

El punto simétrico de un punto respecto de otro, es despejar esta fórmula

$$Q = 2M - P$$

Para dividir un segmento $\overrightarrow{PQ}$ en 3 partes se parte de $M_1 = P + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$, y de forma análoga $M_2 = P + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$, despejando queda una media ponderada:

$$M_1 = \frac{2P + Q}{3}$$

$$M_2 = \frac{P + 2Q}{3}$$

Hallar el vértice D que falta en un cuadrilátero para que sea un paralelogramo

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

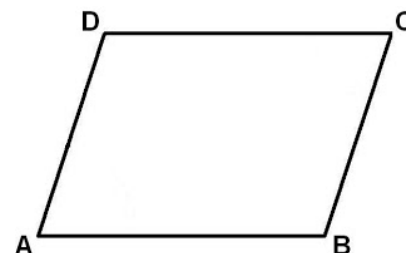
$$D - A = C - B$$

$$D = A + C - B$$

Dos vectores son proporcionales $\vec{u} \propto \vec{v}$ si

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Tres puntos A,B,C están alineados si los vectores que los unen $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ son proporcionales



Producto Escalar (o producto punto)

La idea de multiplicar dos vectores nace pensando en multiplicarlos componente a componente, como hacíamos desde la suma, de hecho, es una función implementada en muchos lenguajes de programación de matemáticas y es el único método que se puede usar en hojas de Excel.

Notaremos con un punto pequeñito el producto usual de vectores, que es el de componente a componente, y es como se espera $(1,2,3) \cdot (4,5,6) = (4,10,18)$. Pero este vector por sí no tiene un significado geométrico, ya que no hereda propiedades de sus productos. Pero con una pequeña modificación vamos a volver muy útil esta primera idea.

Llamaremos producto escalar (o producto punto) a la suma de los elementos componente a componente. La palabra escalar se refiere a que el resultado de este producto da un “escalar”, es decir, un solo número, no un vector.

$$(1,2,3) \bullet (4,5,6) = 4 + 10 + 18 = 32$$

Esta forma de multiplicar está conectada con el producto entre matrices, de forma que si los vectores los vemos como matrices se puede expresar este producto como:

$$(1,2,3) \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (4 + 10 + 18) = (32)$$

En la universidad más que en bachillerato se usa la notación con ángulos para el producto escalar, significando lo mismo pero la forma de escribir es muy distinta $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \bullet \vec{v}$

La propiedad principal de este producto escalar es que está relacionado con el tamaño de cada vector, y el ángulo entre ellos, siendo:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

De forma que podemos calcular el ángulo entre dos vectores si tenemos sus coordenadas, despejando de esta propiedad:

$$\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)$$

Estudiando las propiedades del coseno, la más notable es que el coseno de 90° y el de 270° es igual a cero. Dos vectores que forman 90° (o 270°) se llaman perpendiculares (también ortogonales, y normales), y se indica con el símbolo $\perp$. De esta forma podemos usar el producto punto para comprobar la perpendicular con la siguiente relación:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$$

Las otras propiedades que cumple este producto son:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}, \quad \vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}, \quad k(\vec{u} \bullet \vec{v}) = (k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (k\vec{v}), \quad \vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

Producto Vectorial

Ya que no hemos podido obtener un vector que sea significativo mediante el producto coordenada a coordenada, buscamos un vector que sea una base a partir de los otros dos. Si llamamos a las coordenadas de ese vector (x,y,z) , para que sea una base el determinante de este vector que desconocemos el determinante de los tres vectores no puede ser cero, así podemos escribir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = x(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) + y(3 \cdot 4 - 1 \cdot 6) + z(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -3x + 6y - 3z$$

Un truco usual en matemáticas es saber que al sumar cosas positivas, seguro que no da cero, entonces cogeremos los coeficientes que nos dan en cada variable, y los usaremos como solución, de forma que $(x, y, z) = (-3, 6, -3)$, y así el determinante es suma de cuadrados:

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-3)^2 + 6^2 + (-3)^2 = +54$$

Este número, el 54, está relacionado con los dos vectores de forma análoga a cómo lo está en el producto escalar:

$$\sqrt{54} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$$

De esta forma obtenemos un vector que no es proporcional a los demás, y que si lo investigamos un poco, es además perpendicular a los otros dos (para eso usamos la propiedad del producto escalar):

$$(1, 2, 3) \cdot (-3, 6, -3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

$$(4, 5, 6) \cdot (-3, 6, -3) = -12 + 30 - 18 = 0$$

Para obtener este vector tan interesante, en vez de utilizar estos pasos para la primera, segunda y tercera coordenada en vez de x, y, z , usaremos $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Estos tres elementos tienen una utilización como vectores en física mucho más profunda, pero lo usaremos como truco para resolver el ejercicio.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

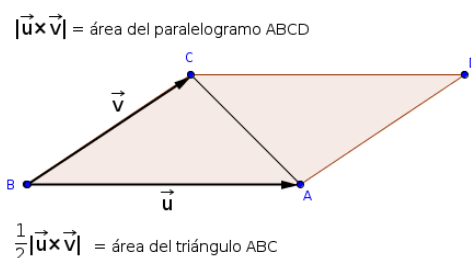
De este nuevo producto vectorial, podemos sacar en conclusión las siguientes reglas:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}, \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}, \quad k(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}), \quad \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

Y la más importante, la relacionada con el ángulo:

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$$

En un paralelogramo, esta fórmula nos da el área formada por dos lados u , y v . Y por lo tanto, la mitad de este módulo nos da el área del triángulo formado por estos dos vectores.



Usando este producto nos serán útiles obtener varios vectores perpendiculares a uno dado. Si tenemos por ejemplo un vector director, podemos sacar otros 3 vectores fáciles normales a este, haciendo el producto con las coordenadas canónicas. Lo notaremos elevándolos a un ángulo, pero hay que explicar los pasos en selectividad.

Sea $\vec{d} = (a, b, c)$ un vector director, y la base canónica $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$

$$\vec{d}_x^\perp = \vec{d} \wedge \vec{e}_x = (0, -c, b)$$

$$\vec{d}_y^\perp = \vec{d} \wedge \vec{e}_y = (-c, 0, a)$$

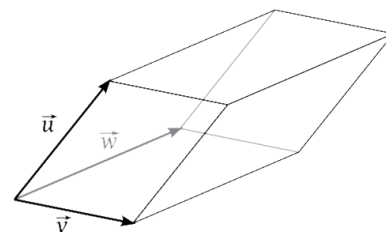
$$\vec{d}_z^\perp = \vec{d} \wedge \vec{e}_z = (-b, a, 0)$$

Producto Mixto

Finalmente, con las herramientas que nos dan las matrices, buscamos una interpretación geométrica al determinante de tres vectores, y lo llamaremos producto mixto.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

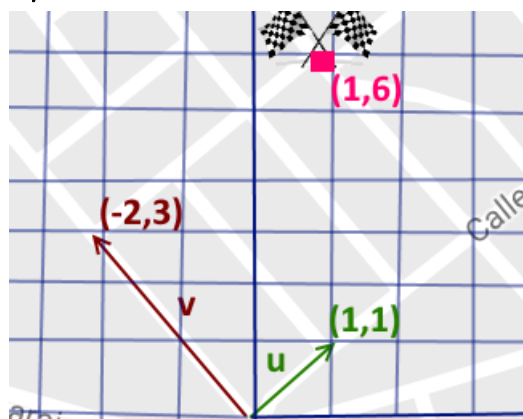
Y el resultado de este determinante nos da el volumen del cubo que forma. Y si lo dividimos por seis nos da el volumen del tetraedro.



4.2 Conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Conoce que tres vectores en un espacio de dimensión tres son linealmente dependientes si y sólo si el determinante es cero.

Una base tiene sentido en el contexto de un problema típico de matemáticas. Si pensamos en un mapa de dos dimensiones, los ejes de coordenadas están puestos en el este y el norte. Pero es frecuente que las ciudades no estén orientadas de norte a sur, pueden estar orientadas de muchas otras formas. Planteando que las calles están todas orientadas en otra dirección, la pregunta es cómo llegar a un punto que está descrito sobre el norte y el sur, explicado sobre cuantas manzanas hay que recorrer.

En el ejemplo, queremos ir del origen de coordenadas que es donde estamos, al punto del mapa (1,6). Como no podemos volar, tenemos que andar por las calles, y tendríamos que coger 3 veces la dirección de $\vec{u}$, y una vez la de $\vec{v}$ y así llegaríamos a la meta.



Matemáticamente este problema se plantea como:

Sea una base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u} = (1,1), \vec{v} = (-2,3)\}$, cómo se expresa el vector $(1,6)$ respecto de esta base:

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = (1,6)$$

$$x \cdot (1,1) + y \cdot (-2,3) = (1,6)$$

$$\begin{cases} 1x - 2y = 1 \\ 1x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Del planteamiento de encontrar los números, x,y que son las coordenadas del vector (1,6) en la base $\mathcal{B}$. En la realización del sistema de ecuaciones, se puede convertir en un sistema de ecuaciones, y de aquí en una

ecuación con matrices. Esta matriz está formada por los vectores de la base en vertical, de forma que no hay que realizar estos pasos siempre igual. A esta matriz se le llama matriz de cambio de base. Y esta matriz nos permite cambiar de la base $\mathcal{B}_1$ a la base usual, que se llama canónica, y se llama $\mathcal{B}_0 = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$.

Y al despejar el sistema de forma matricial, observamos que la inversa de la matriz es la matriz del cambio de base en la otra dirección. Para recordar qué cambia llamamos a la matriz cambio de base de 0 a 1, o de 1 a 0:

$$B_{10} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B_{01} = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Para poder llegar a todos los lados, las coordenadas de la base deberían de poder dejarnos andar por todo el mapa, y no solo en una línea. Esto se traduce en que para que dos vectores formen una base, tienen que ser linealmente independientes, es decir, que su determinante no sea cero. Con la necesidad que también deriva de ello, que es que, si quiero deshacer el cambio de base, para poder hallar la matriz inversa, necesito una matriz con determinante no nulo.

Extrapolando este problema a 3 dimensiones, donde nosotros nos vamos a mover, es seguir los mismos pasos, pero con unos pocos más de números. Veamos con un ejemplo.

Sea una base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u} = (1,1,0), \vec{v} = (0,1,1), \vec{w} = (1,0,1)\}$, calcula las coordenadas en esta nueva base del vector $(1,2,3)$.

Para eso creamos la matriz de cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por último, podemos encontrarnos un problema en el que, a partir de 3 vectores, tenemos que obtener una base. Y una vez tenemos una base de 2 vectores, sólo podemos encontrar algunos puntos del espacio, que partan del origen. Hagamos el ejemplo:

Encuentra una base a partir de estos elementos, $\{\vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (1,-1,0), \vec{w} = (2,0,1)\}$. Y encuentra si se puede representar el vector $(2,4,3)$ en dicha base

Entonces si me piden que obtengamos una base, seguro que la matriz de cambio de base va a tener un determinante cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces no es una base, porque para que sea base los vectores tienen que ser linealmente independientes. Entonces encontrar una base es hacer reducción por Gauss-Jordan de la Traspuesta, con la intención de encontrar el vector que sobra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base a partir de estos vectores es $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u} = (1,-1,0), \vec{v} = (0,2,1)\}$, Entonces las coordenadas para el $(2,4,3)$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ahora nos encontramos que no sabemos hacer inversas de matrices no cuadradas (pseudo-inversas). Pero la haberlo simplificado con Gauss-Jordan al ponerlo como sistema de ecuaciones está prácticamente resuelto:

$$\begin{cases} x = 2 \\ -x + 2y = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Tenemos ya la soluciones de $x = 2$, $y = 3$, y para que este vector esté en la base, tiene que ser válidas estas soluciones en todas las ecuaciones, como en $-x + 2y = 4$, $-2 + 2 \cdot 3 = 4$ sí se cumple, entonces en esa base el vector se escribe como $(2,3)$.

4.3 Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas (paramétrica, continua e implícita), pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

Una recta está formada por un punto, y un vector que desplaza al punto en una dirección y en ambos sentidos al multiplicarlo por un número que se llama escalar, y que por tradición se le da la letra griega lambda λ . Presentamos a los elementos que vamos a usar, he escogido una notación que nos permita identificar cada elemento de la manera más cómoda posible:

$X = (x, y, z)$ Son las coordenadas de los puntos de la recta

$P = (p_1, p_2, p_3)$ Son las coordenadas del punto que cogemos como referencia para dibujar la recta

$\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ Es el vector director, nos indica la dirección de la recta

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ Es el primer vector normal de la recta

$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ Es el segundo vector normal de la recta, que no puede ser proporcional al primero. Uso la letra griega eta que se parece mucho a la n pero alargándola

Ecuación paramétrica en forma vectorial

$$X = P + \lambda \vec{d}$$

Despejando va quedando la siguiente forma $X - P = \lambda \vec{d}$ y multiplicando en ambos lados por los vectores normales, queda:

Ecuación normal vectorial

$$\begin{cases} \vec{n}(X - P) = 0 \\ \vec{\eta}(X - P) = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones en coordenadas son las mismas que las vectoriales, solo que los pasos intermedios son más largos y aparece una ecuación intermedia más, la ecuación continua.

Ecuación paramétrica

Esta ecuación es muy útil para hacer sistemas de ecuaciones con la ecuación general de otra recta.

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases}$$

Al despejar λ , nos queda la ecuación continua que sale por igualación

Ecuación continua (punto + vector director)

$$\frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} = \frac{z - p_3}{d_3}$$

Como el vector director se puede sacar a partir de dos puntos, $\vec{d} = \overrightarrow{PQ}$, hay una forma alternativa de la ecuación continua para dos puntos

Ecuación continua (2 puntos P y Q)

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{z - p_3}{q_3 - p_3}$$

Al despejar estas ecuaciones dos a dos, obtenemos 3 ecuaciones, con sus 3 vectores normales respectivamente. De estas tres ecuaciones, solo dos son independientes, y es que en algunos casos uno de los vectores puede salir (0,0,0) y no serviría. Entonces, de los tres vectores que sacamos, que nombraremos normales a la coordenada x, y, z, habrá al menos dos válidos, estos vectores son de la forma:

$$\vec{n}_x^\perp = (0, -d_3, d_2)$$

$$\vec{n}_y^\perp = (-d_3, 0, d_1)$$

$$\vec{n}_z^\perp = (-d_2, d_1, 0)$$

Son fáciles de recordar porque se pone un cero en una coordenada, a las otras dos se les da la vuelta y a la primera se le pone el signo menos.

Entonces sean dos vectores normales escogidos de entre estos 3 o obtenidos de cualquier otra forma, la ecuación normal es de la forma

Ecuación Normal (1 punto + 1 vector normal)

$$\begin{cases} n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0 \\ \eta_1(x - p_1) + \eta_2(y - p_2) + \eta_3(z - p_3) = 0 \end{cases}$$

Ecuación General

Si se multiplican todos los números, quedan simplificados de forma que al final queda un número. Éste número que es el término independiente tiene que ver con la distancia al origen de la recta, ya no quedan muchas más letras en forma de "d", cogeremos la que faltan, la d cursiva ∂ y la d cursiva tachada, que es la $\eth$ del islandés $\eth$.

$$\begin{cases} n_1x + n_2y + n_3z + \partial = 0 \\ \eta_1x + \eta_2y + \eta_3z + \eth = 0 \end{cases}$$

4.4 Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas (paramétrica, general o implícita), pasando de una a otra correctamente.

$X = (x, y, z)$ Son las coordenadas de los puntos de la recta

$P = (p_1, p_2, p_3)$ Son las coordenadas del punto que cogemos como referencia para dibujar la recta

$\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ Es el primer vector director

$\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ Es el segundo vector director del plano, que no puede ser proporcional al primero. Usamos la letra griega delta que se parece a la d con un poco de curva.

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ Es el vector normal de la recta

Ecuación paramétrica en forma vectorial

$$X = P + \lambda \vec{d} + \mu \vec{\delta}$$

Despejando va quedando la siguiente forma $X - P = \lambda \vec{d} + \mu \vec{\delta}$ y multiplicando en ambos lados por el vector normal, queda:

Ecuación normal vectorial

$$\vec{n}(X - P) = 0$$

Expresándola en ecuaciones paramétricas, tenemos

Ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 + \mu \delta_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 + \mu \delta_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 + \mu \delta_3 \end{cases}$$

Al despejarla de forma $X - P = \lambda \vec{d} + \mu \vec{\delta}$, es un sistema de 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Para que el sistema tenga solución, una ecuación tiene que estar "repetida", es decir, que sea combinación lineal de las otras dos. Cuando eso ocurre, el determinante de la matriz ampliada tiene que ser cero. El planteamiento intermedio del determinante es la ecuación intermedia entre la paramétrica y la general, es por eso que también se llama:

Ecuación continua (1 punto + 2 vectores directores)

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & d_1 & \delta_1 \\ y - p_2 & d_2 & \delta_2 \\ z - p_3 & d_3 & \delta_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación continua (2 puntos + 1 vector director)

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & q_1 - p_1 & d_1 \\ y - p_2 & q_2 - p_2 & d_2 \\ z - p_3 & q_3 - p_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación continua (3 puntos)

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ y - p_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ z - p_3 & q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

De la primera ecuación continua podemos obtener la ecuación general, siendo $\vec{n}$ el vector normal

Ecuación Normal (1 punto + 1 vector normal)

$$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0$$

Ecuación General

$$n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$$

Distancias

En el espacio tenemos 3 elementos entre los que podemos hallar su distancia, estos son los puntos, las rectas y los planos. Las combinaciones son:

Entre 2 puntos	Entre 2 rectas paralelas	Entre dos planos paralelos
Entre 1 punto y una recta	Entre 2 rectas que se cruzan	
Entre 1 punto y un plano	Entre 1 recta y un plano	

El orden de distancias va relacionado con la dificultad y la semejanza entre las fórmulas.

Distancia entre dos puntos

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Distancia entre un punto y una recta

Se puede simplificar a la distancia entre el punto más cercano de la recta al punto, para eso se calcula el plano perpendicular a r que pasa por el punto P .

Utilizando las propiedades del área formada por el paralelogramo formado por un punto de la recta P_r , y el punto que tenemos. La distancia es la altura del paralelogramo, entonces queda

$$d(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{base}} = \frac{|\vec{d}_r \wedge \overrightarrow{P_r P}|}{|\vec{d}_r|}$$

Distancia entre dos rectas paralelas

Como cuando dos rectas son paralelas, cualquier punto de una de ellas nos sirve para calcular la distancia con la otra, y así se puede reducir. Así se puede simplificar a una distancia entre un punto y una recta.

Así la fórmula anterior queda ligeramente modificada con un punto de la recta s

$$d(r, s) = \frac{\text{Área}}{\text{base}} = \frac{|\vec{d}_r \wedge \overrightarrow{P_r P_s}|}{|\vec{d}_r|}$$

Distancia entre un punto y un plano

Para simplificarlo se puede buscar el punto más cercano del plano a la recta, calculando la recta perpendicular al plano que pasa por el punto, y calcular el punto de intersección y la distancia entre este punto más cercano y P.

Utilizando las propiedades de los productos, cogiendo un punto del plano y el punto P, calculamos el área que da el paralelogramo formado por el lado formado por esos dos puntos, y es perpendicular al plano, ya que $\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{P P_r} = |\vec{n}_\pi| \cdot |\overrightarrow{P P_r}| \cdot \cos(90 - \alpha) = |\vec{n}_\pi| \cdot |\overrightarrow{P P_r}| \cdot \sin \alpha$, por lo que si cogemos su valor positivo tenemos el área, si lo dividimos por la base tenemos la altura, que es la distancia entre ambos elementos, entonces:

$$d(P, \pi) = \frac{\text{Área}}{\text{base}} = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{P P_r}|}{|\vec{n}_\pi|} = \dots = \frac{|n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + \partial|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Distancia entre dos planos paralelos

Primero si dos planos no son paralelos, su distancia es cero porque se corta formando una recta. Una vez recordado esto, la distancia entre dos planos paralelos se reduce a un punto y un plano escogiendo un punto de uno de los planos y calculando la distancia al otro.

Si las dos ecuaciones del plano se simplifican de forma que tienen el mismo vector normal (y al ser paralelo su distancia es distinta) nos encontramos con estas dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \pi : n_1 x + n_2 y + n_3 z + \partial &= 0 \\ \kappa : n_1 x + n_2 y + n_3 z + \delta &= 0 \end{aligned}$$

Entonces la fórmula puede simplificarse en coordenadas así:

$$d(\pi, \kappa) = \frac{\text{Área}}{\text{base}} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_\pi P_\kappa}|}{|\vec{n}|} = \dots = \frac{|\delta - \partial|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

Es sin duda el ejercicio más complicado, la forma de reducirlo a algo más simple es encontrar la recta perpendicular a las otras dos. Y para ello hay que hacer la intersección de los planos formados por los vectores directores de cada una de las rectas y un vector director de la recta perpendicular a ambas, obtenido mediante el producto vectorial $\vec{d}_t = \vec{d}_r \wedge \vec{d}_s$

La forma de calcularlo usando las propiedades de los productos, es coger el paralelepípedo formado por los dos vectores directores de las dos rectas, y los dos puntos de ellas. Y a partir de este volumen, dividirlo entre el área formada por los vectores directores para que me quede la altura

$$d(r, s) = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área}} = \frac{|[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\vec{d}_r \wedge \vec{d}_s|}$$

Ejercicios de Selectividad de 4. Geometría

Posiciones de rectas y planos

Se considera el punto $P(1,0,-1)$ y el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$.

a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π .

b) Determina la ecuación del plano que contiene al punto P , es perpendicular al plano π y es paralelo a la recta dada por
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,1,0)$ y $B(3,-1,1)$ y s la recta dada por

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

a) Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera el plano π de ecuación $6x - my + 2z = 1$ y la recta r dada por $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$

a) Calcula m en el caso en que la recta r es perpendicular al plano π .

b) ¿Existe algún valor de m para el que la recta r esté contenida en el plano π ?

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera el punto $A(1,-1,1)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r .

b) Determina la ecuación del plano que contiene a r y pasa por A .

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$

a) Calcula el punto P' , simétrico del punto $P(2,-1,5)$ respecto del plano π .

b) Calcula la recta r' , simétrica de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

Considera el punto $P(-3,1,6)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .

b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Halla unas ecuaciones paramétricas para la recta r , que contiene al punto $P(3, -5, 4)$ y corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Sea r la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z$

a) Halla el punto de r que equidista del origen de coordenadas y del punto $P(4, -2, 2)$

b) Determina el punto de la recta r más próximo al origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera el plano π de ecuación $mx + 5y + 2z = 0$ y la recta r dada por $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$

a) Calcula m y n en el caso en el que la recta r es perpendicular al plano π .

b) Calcula m y n en el caso en el que la recta r está contenida en el plano π .

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto $(1, 1, 0)$.

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (\lambda, 1, 0)$.

a) Calcula los valores de λ que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean ortogonales.

b) Calcula los valores de λ que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

c) Para $\lambda=1$ escribe el vector $\vec{r} = (3, 0, 2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Sea r la recta dada por $\frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3}$ y sea s la recta dada por $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$.

a) Determina la posición relativa de r y s .

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ y $\vec{w} = (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están en el mismo plano.

b) $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{1}{6}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Considera el punto $A(8, -1, 3)$ y la recta r dada por $\frac{x+1}{2} = y-2 = \frac{z-1}{3}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r .

b) Halla el punto simétrico de A respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$

a) Halla la posición relativa de π y r .

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

c) Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, -1, 3)$.

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r .

b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera las rectas: $r \equiv x = y = z$ $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

Halla la ecuación de la recta que corta a r y a s y es paralela a t .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(-1, 0, 3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(3, 2, -3)$.

a) Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

b) Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.

c) Calcula las coordenadas del vértice D .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

Considera los puntos $A(1,2,3)$ y $B(-1,0,4)$.

- a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.
b) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

Considera los puntos $A(1,0,2)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,1,2)$ y $D(1,0,4)$.

- a) Halla la ecuación del plano que contiene a A , B y C
b) Halla el punto simétrico de D respecto del plano $x - y - 5z + 9 = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Los puntos $A(1,1,5)$ y $B(1,1,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C , consecutivo a B , está en la recta $x = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+1}{2}$. Determina los vértices C y D .

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Distancias

Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta r dada por $\begin{cases} y+2z=0 \\ x=1 \end{cases}$.

- a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .
b) Calcula la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r .

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Sea r la recta dada por $\begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases}$ y sea s la recta definida por $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2 \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

- a) Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .
b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi \equiv x + y + z + 3 = 0 \quad y \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$

- Calcula m para que A , B , C y D estén en un mismo plano.
- Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Sean el punto $P(1,6,-2)$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$

- Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r .
- Calcula la distancia entre el punto P y la recta r

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$.

- Determina la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r .
- Calcula la distancia de P a r .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$ y $C(3,2,0)$ y el plano π determinado por ellos.

- Halla la ecuación de la recta r que está contenida en π y tal que A y B son simétricos respecto de r .
- Calcula la distancia de A a r .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

- Determina la posición relativa de r y s .
- Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

Calcula de manera razonada la distancia del eje OX a la recta r de ecuaciones $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera los planos π_1 y π_2 dados, respectivamente, por las ecuaciones
 $(x, y, z) = (-2, 0, 7) + \lambda(1, -2, 0) + \mu(0, 1, -1)$ y $2x + y - z + 5 = 0$
 Determina los puntos de la recta r definida por $x = y + 1 = \frac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2 .
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Áreas y Volúmenes

Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

- a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.
 b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s , calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo $A(1, 1, 0)$ y $B(2, 2, 1)$.
 Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:
 a) Halla unas ecuaciones paramétricas de r .
 b) Calcula el área del triángulo ABC .
 c) Determina las coordenadas del punto D .
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 1$.
 a) Halla el punto de π más próximo al punto $(3, 1, 2)$.
 b) Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Sean los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 2, 0)$ y $D(2, 1, m)$
 c) Calcula el área del triángulo ABC .
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de la recta r dada por
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Calcula las coordenadas de los posibles puntos C de r para que el triángulo ABC tenga un ángulo recto en el vértice A .
- Calcula las coordenadas de los posibles puntos D de r para que el triángulo ABD tenga un área igual a $\sqrt{2}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Sean los planos $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$ y $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = 0$.

- Determina el ángulo que forman π y π' .
- Calcula el volumen del tetraedro limitado por π y los planos coordenados.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Considera los puntos $B(1,2,-3)$, $C(9,-1,2)$, $D(5,0,-1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B , C y D .
- Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Considera el punto $P(1,0,-1)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

- Halla la distancia de P a r .
- Determina la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Sea r la recta definida por
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$$
 y s la recta dada por
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$
.

- Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.
- Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Considera la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(-1,1,0)$.

- Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $C(-2,3,2)$.
- Calcula la distancia de r a s .

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.

- Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.
- Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
- Calcula el área del triángulo ABC .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y s la recta dada por $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

- Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .
- Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Considera los puntos $A(1,1,2)$ y $B(1,-1,-2)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

- Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y por B .
- Halla el punto de la recta r que está a la misma distancia de A y de B .

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Sea r la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector dirección $(a,2a,1)$ y sea s la recta dada por: $s \equiv \begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases}$

- Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.
- Calcula, para $a = 1$, la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Considera los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$.

- Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.
- Calcula la distancia de P a π .

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

Calcula la distancia entre las rectas: $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Considera los puntos $A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.

- Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo.
- Calcula el área de dicho rectángulo.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

Considera el plano π de ecuación $2x + y + 3z - 6 = 0$.

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

Cambio de Base

(Revisar los ejemplos de los apuntes)