L'algorithme binaire récursif de calcul de pgcd.

Damien STEHLÉ

Rocquencourt, 15-03-2004

Travail en commun avec Paul Zimmermann

http://www.loria.fr/~stehle/

Sommaire

- 1. Quelques rappels.
- 2. Les divisions standard et binaire.
- 3. L'algorithme de Knuth et l'algorithme binaire récursif.
- 4. Analyse de complexité et considérations pratiques.

Arithmétique des entiers

- Nombres représentés en binaire, avec au plus n chiffres.
- Comparaison, addition, soustraction (naïves) en $O(n)$.
- Multiplication en $M(n) = O(n \log n \log\log n)$, à base de FFT.
- Division (naïve) d'un nombre de taille m par un nombre de taille $n < m$ en $O((m-n) \cdot m)$.
- Division d'un nombre de taille $2n$ par un nombre de taille n en $O(M(n))$, par itération de Newton et multiplication rapide.

Le problème du pgcd

- But : étant donnés a et b, calculer $g = \mathrm{pgcd}(a, b)$.
- Mieux : calculer aussi A et B tels que $Aa + Bb = g$ (pgcd étendu).
- Modèle de complexité : opérations élémentaires sur les bits.

- Applications : calculs sur les rationnels, inversions modulaires, ...
- Dans la suite, $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n = \max(\mathrm{bits}(a), \mathrm{bits}(b))$.

Petite histoire du pgcd

- ≈ -300, Euclide : algo. d'Euclide, en temps quadratique $O(n^2)$.
- 1938, Lehmer : accélération de l'algorithme d'Euclide
  (les bits forts suffisent pour calculer les premiers quotients).
- 1970, Schönhage et Strassen : multiplication rapide en temps
  $$M(n) = O(n \log n \log\log n).$$
- 1970, Knuth : algorithme de Lehmer récursif, basé sur la
  multiplication rapide de Schönhage-Strassen.
  Complexité quasi-linéaire $O(M(n) \log^4 n)$.
- 1971, Schönhage : analyse précise de l'algorithme de Knuth.
  Complexité quasi-linéaire $O(M(n) \log n)$.

Le calcul de pgcd en pratique

– Algo. de Knuth efficace seulement pour de très grands nombres.
– Pgcd sous-quadratique rarement implanté (Mathematica, Magma).
– Deux techniques pour accélérer facilement l'algorithme d'Euclide :

1) Lehmer : "Tant que c'est facile, n'utiliser que les bits forts".
2) Binaire : "Shifter et additionner sont plus rapides que diviser".

Les résultats

– Incompatibilité des deux idées précédentes :

bits forts dans 1) $\leftrightarrow$ bits faibles dans 2).

– Résultats :

1. Définition d'une division (GB) par les bits faibles ayant la propriété de Lehmer (pour les bits faibles).
2. Transposition de l'algo. de Knuth pour cette division.
3. Au passage, l'algo. de Knuth garde la même complexité mais devient nettement plus simple.

La division Euclidienne "standard"

– Étant donnés $a, b > 0$, il existe un unique couple (q, r) t.q. :

$$a = bq + r, \;\; 0 \leq r < b, \;\; q \geq 0.$$

– Exemple : $a = 157 = 10011101$, $b = 59 = 111011$.
– $(q, r) = (2, 39) = (10, 100111)$.
– Remarque : $10011 = 19$, $111 = 7$ donnent le même quotient.
– Calcul de q en $O(M(n))$ par itération de Newton (théorie).
– Calcul de q en $O(n)$ car $q = O(1)$ (pratique).

L'algorithme d'Euclide "standard"

Input : $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a > b$.

Output : $g = \mathrm{pgcd}(a, b)$, et M t.q. $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Si $b = 0$, renvoyer a et I_2.
2. $q, r := \lfloor a/b \rfloor$.
3. $g, M' := \mathrm{Euclide}(b, r)$.
4. Renvoyer g et $M = M' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}$.

La division binaire (1)

- C'est le "miroir" de la division Euclidienne.
- Si $a \neq 0$, $\nu_2(a)$ est le plus grand k t.q. $2^k \mid a$. Et $\nu_2(0) = \infty$.

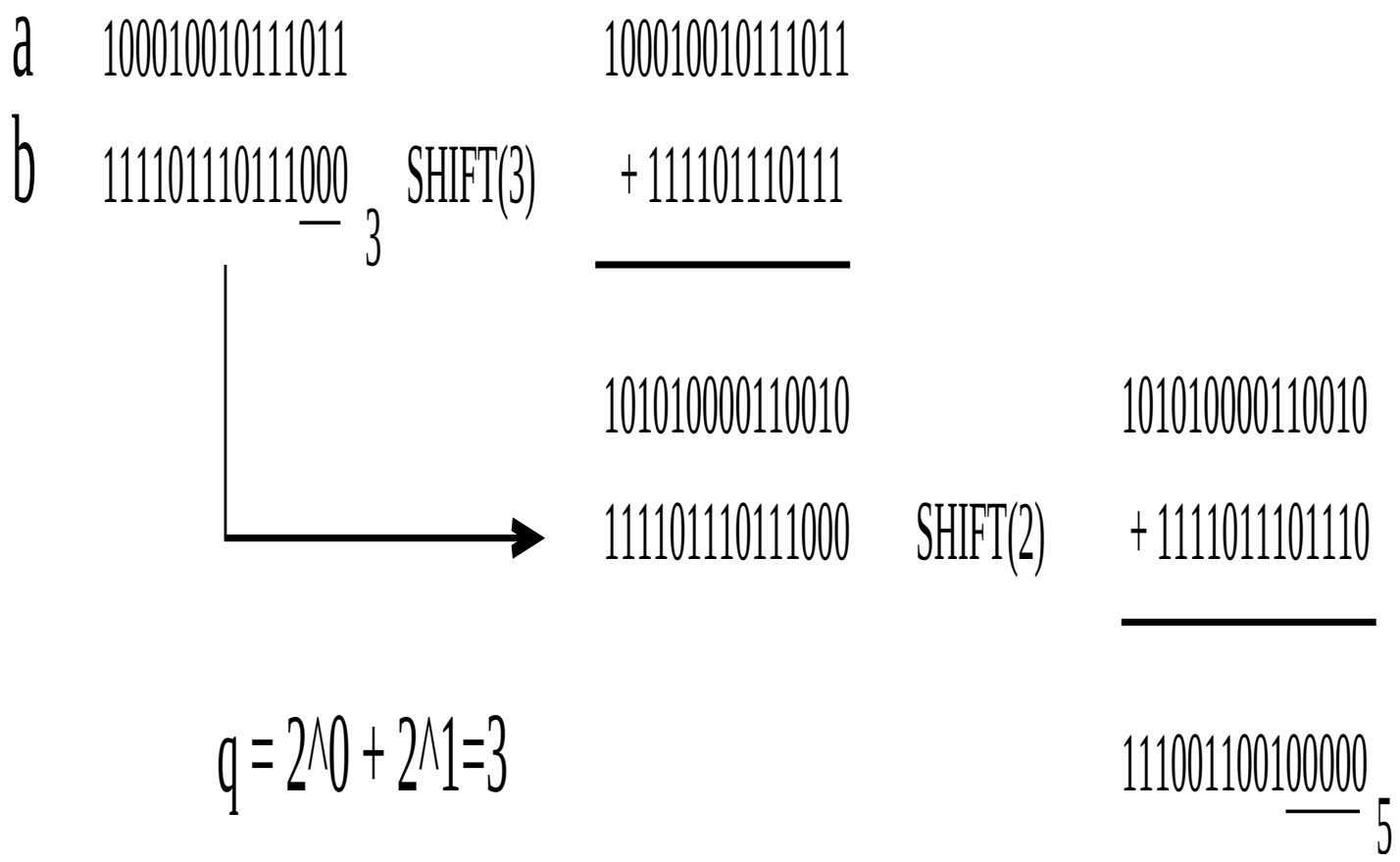
- Pour a, b avec $\nu_2(a) < \nu_2(b)$, il existe un unique couple (q, r) t.q. :

$$a = \frac{b}{2^{\nu_2(b)-\nu_2(a)}} q + r, \quad \nu_2(r) > \nu_2(b), \quad |q| < 2^{\nu_2(b)-\nu_2(a)}.$$

- Exemple : $a = 157 = 10011101$, $b = 4 * 59 = 11101100$.

$$\nu_2(b) - \nu_2(a) = 2$$
$$q = -1, \quad r = a + \frac{b}{4} = 11011000 \ (= 216)$$
$$\nu_2(r) = 3 > \nu_2(b).$$

La division binaire (2)



La division binaire (3)

– Le quotient binaire de a par b est exactement

$$\frac{a}{2^{\nu(a)}} \left(\frac{b}{2^{\nu(b)}} \right)^{-1} \bmod 2^{\nu(b)-\nu(a)+1}.$$

– Calcul par itération de Newton en temps $O(M(n))$ (théorie).
– Calcul de q en $O(n)$ car $q = O(1)$ (pratique).
– Seuls les $\nu(b) - \nu(a) + 1$ derniers bits non nuls de a et b importent.

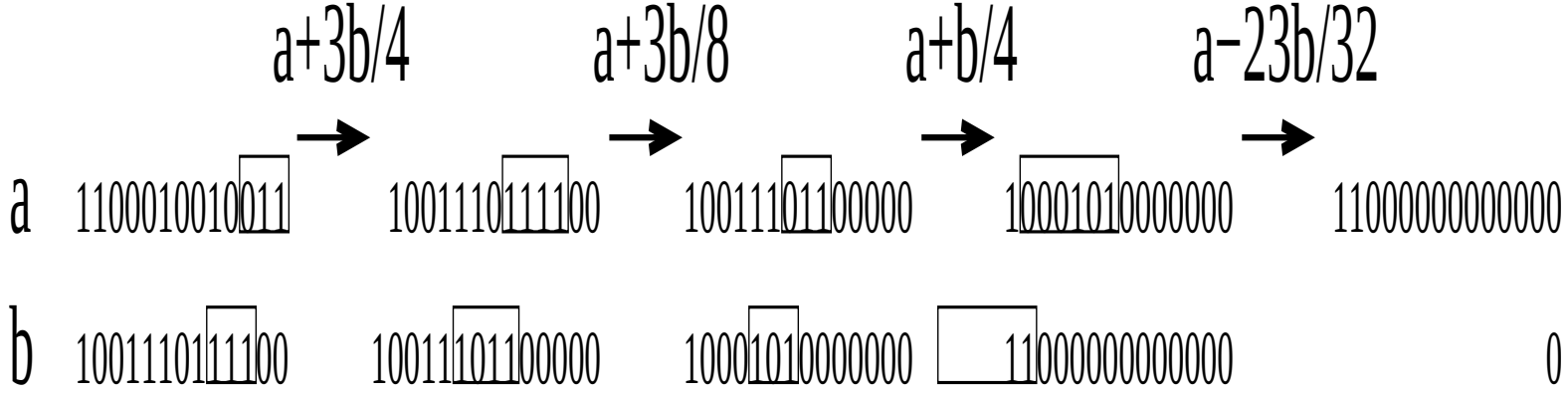
L'algorithme d'Euclide binaire

Input : $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $0 = \nu(a) < \nu(b)$.

Output : $g = \mathrm{pgcd}(a, b)$, et M t.q. $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Si $b = 0$, renvoyer a et I_2.
2. $q, r :=$ **Div-Bin**(a, b).
3. $g, M :=$ Gcd-Bin$(\frac{b}{2^{\nu(b)}}, \frac{r}{2^{\nu(b)}})$.
4. Renvoyer g et $\frac{1}{2^{\nu(b)}} M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{q}{2^{\nu(b)}} \end{pmatrix}$.

Un exemple



$$\text{pgcd}=3 \qquad \begin{bmatrix} 3.2^{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -23/32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Knuth (1)

- Avec la division "standard".
- Deux remarques préliminaires :

  1) Stocker les restes : $O(n^2)$, stocker les quotients : $O(n)$.

  2) Les k bits les plus significatifs permettent de calculer les $\approx k/2$ premiers bits de la suite des quotients.
- Algorithme de Knuth : utilisation récursive de 2) pour calculer tous les quotients et très peu de restes.

- PROBLÈME : 2) est faux si on enlève $\approx$.

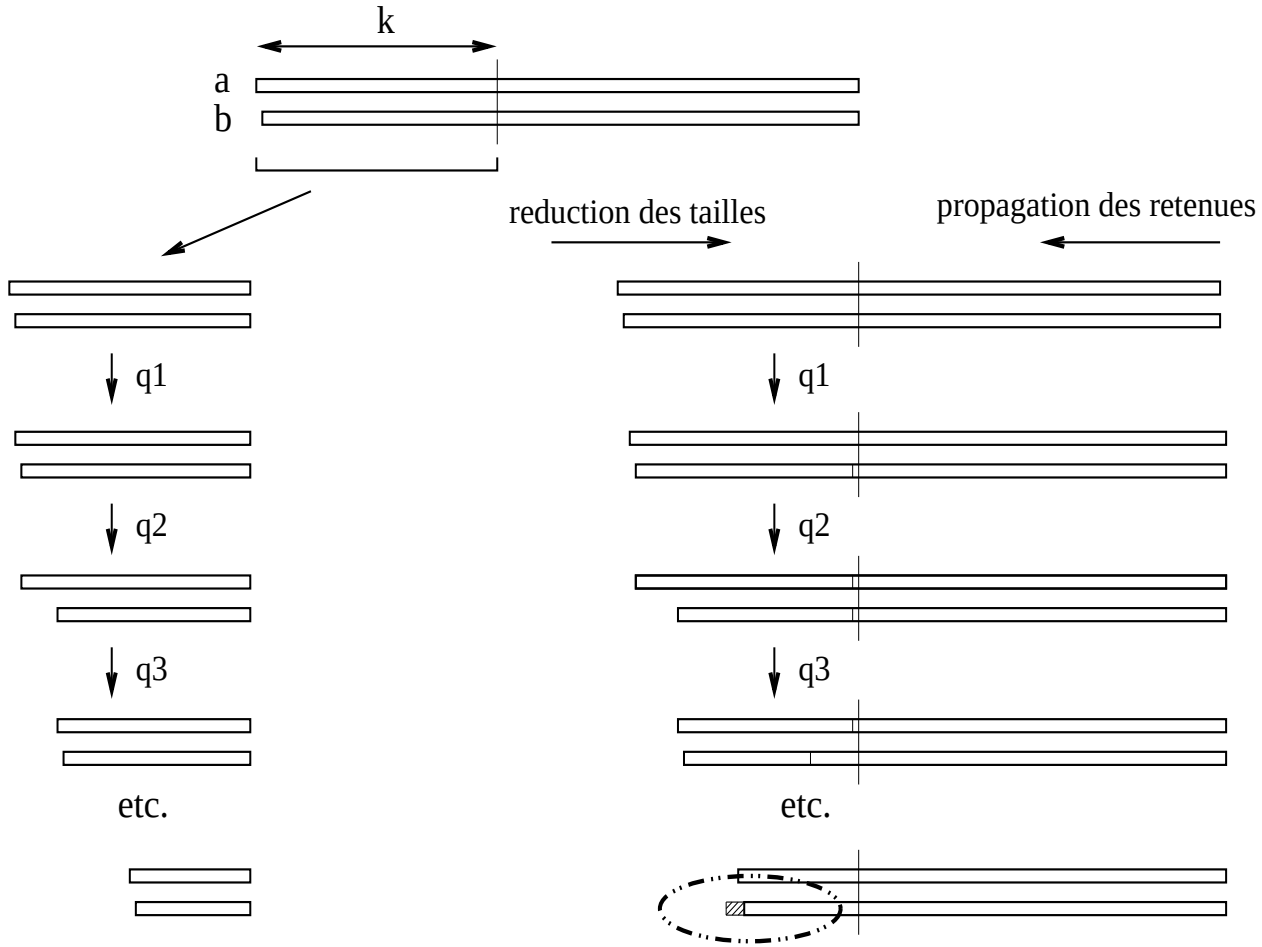
Réparation des quotients

- $a' = MSB_k(a)$ et $b' = MSB_k(b)$.
  $a', b' \longrightarrow r'_0, \ldots, r'_{i+1},\ q'_1, \ldots, q'_i.$ $\qquad$ $a, b \longrightarrow r_0, \ldots, r_{j+1},\ q_1, \ldots, q_j.$
  i et j sont tels que :
  $\text{bits}(r'_i) \geq k/2 > \text{bits}(r'_{i+1})$ et $\text{bits}(r_j) \geq \text{bits}(a) - k/2 > \text{bits}(r_{j+1})$.
  Alors $q'_1, \ldots, q'_i$ "ressemblent" à $q_1, \ldots, q_j$.

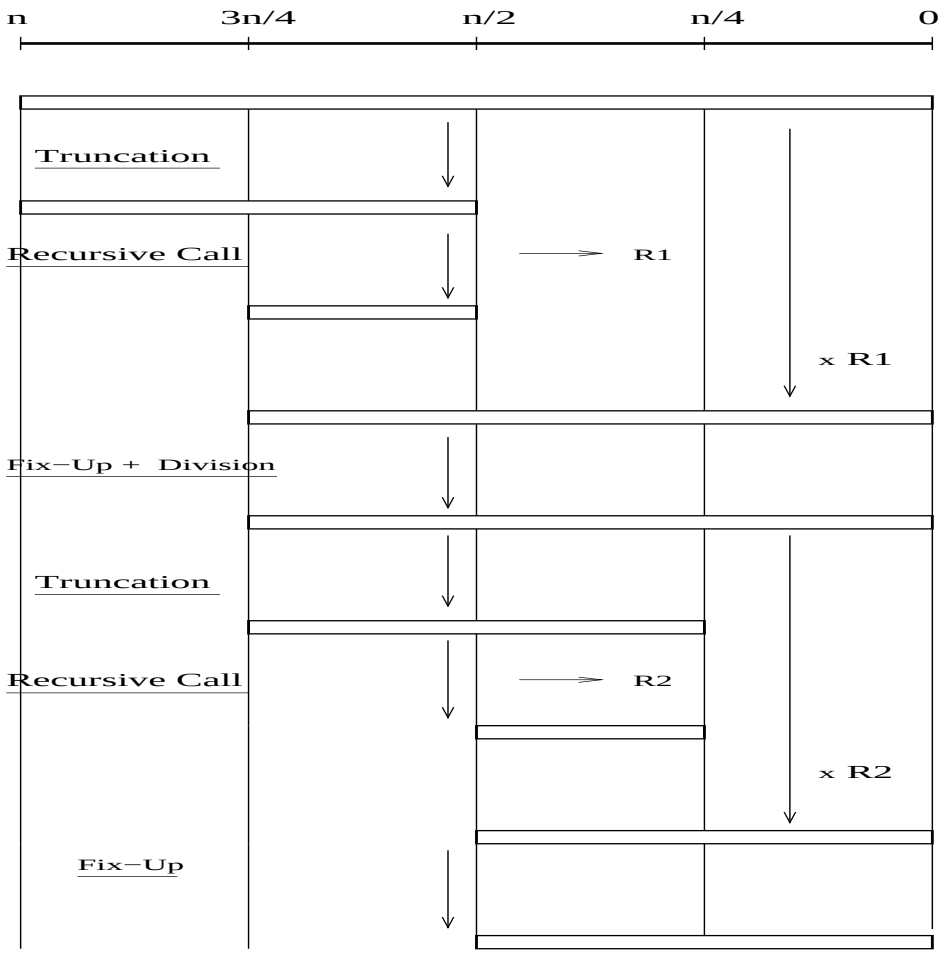
- MAIS il se peut que l'on ait :
  1) $j = i,\ \ q_1, \ldots, q_{i-1} = q'_1, \ldots, q'_{i-1}$ mais $q'_i \neq q_i$.
  2) $j = i - O(1)$ et $q_1, \ldots, q_j = q'_1, \ldots, q'_j$.
  3) $j = i + O(1)$ et $q_1, \ldots, q_i = q'_1, \ldots, q'_i$.
  4) Des mélanges entre 1), 2) et 3).

  $\Longrightarrow$ Il existe une procédure de "réparation" des quotients, qui coûte $O(M(n))$, mais elle complique notablement l'algorithme.

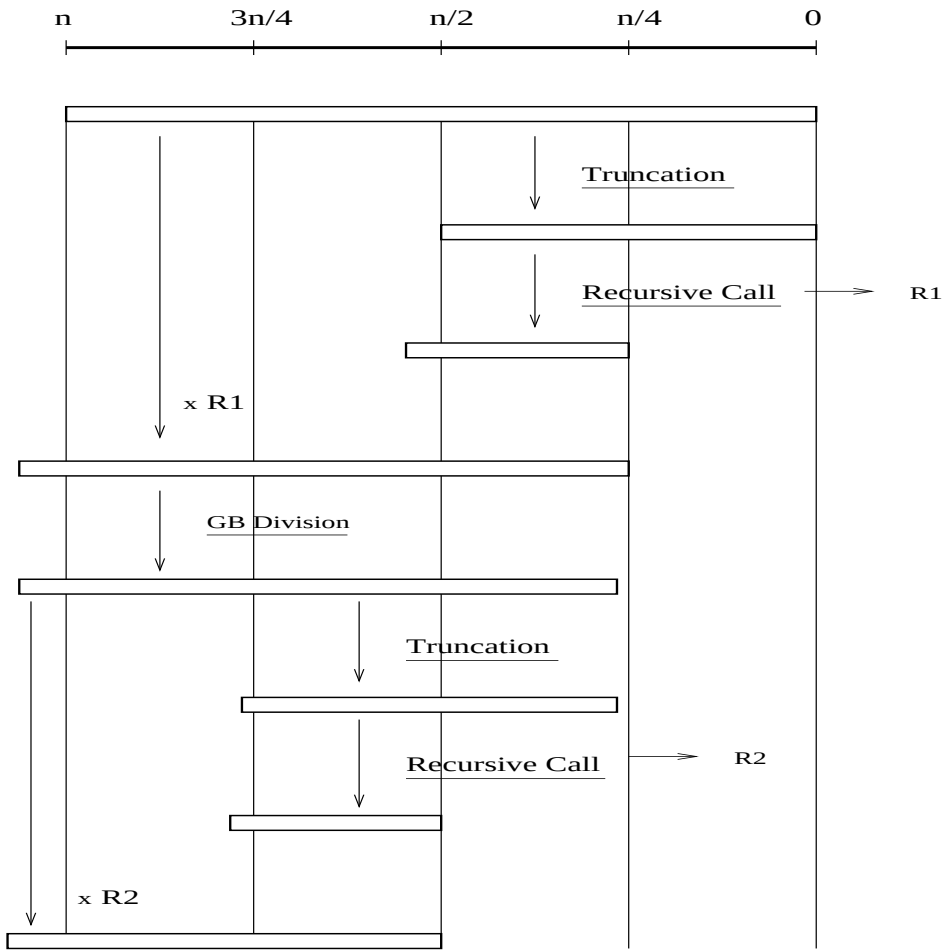
Origine du problème



L'algorithme de Knuth (2)



L'algorithme récursif binaire (1)



L'algorithme récursif binaire (2)

- Droite $\leftrightarrow$ Gauche.
- Division GB $\leftrightarrow$ Division "standard".
- Les idées restent les mêmes sauf que :

  1) les bits forts sont remplacés par les bits faibles.
  2) les quotients calculés lors des appels récursifs sont corrects.

$\Longrightarrow$ Il n'y a plus de procédure de réparation (Fixup).

L'algorithme récursif binaire (3)

Input : a, b t.q. $0 = \nu(a) < \nu(b)$.

Output : j et R t.q. $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 2^{-j} R \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et c, d sont les deux restes successifs de la suite des restes de a et b t.q.

$$\nu(c) \leq \text{bits}(a)/2 < \nu(d).$$

1) $k := \lfloor \text{bits}(a)/2 \rfloor$.
2) Si $\nu(b) > k$, renvoyer $0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3) $d := \lfloor k/2 \rfloor$.
4) $a := a_1 2^{2d+1} + a_0$, $b := b_1 2^{2d+1} + b_0$ avec $0 \leq a_0, b_0 < 2^{2d+1}$.
5) $j_1, R_1 =$ **Half-GB-gcd**(a_0, b_0).

6) $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} := 2^{2d+1-j_1} R_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

7) Si $\nu(b') > k$, renvoyer j_1, R_1.

8) $(q, r) :=$ **Div-Bin**(a', b'), $j_0 := \nu(b')$.

9) $d := k - \nu(b')$.

10) $\frac{b'}{2^{\nu(b')}} := b'_1 2^{2d+1} + b'_0$, $\frac{r}{2^{\nu(b')}} := r_1 2^{2d+1} + r_0$
avec $0 \leq b'_0, r_0 < 2^{2d+1}$.

11) $j_2, R_2 :=$ **Half-GB-gcd**(b'_0, r_0).

12) $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := 2^{2d+1-j_2} R_2 \begin{pmatrix} b' \\ r \end{pmatrix}$.

13) Renvoyer $j_1 + j_0 + j_2$, $R_2 \begin{pmatrix} 0 & 2^{j_0} \\ 2^{j_0} & q \end{pmatrix} R_1$.

Un exemple

	q	n
10011111011101101101		
11110111100010011100	−3	2
−11010001100001000	−1	1
100000100101000100000	1	2
100110111110000000	1	2
10000111001100000000	3	2
11110001110000000000	−1	1
10010101100000000000	−1	1
10100111000000000000	−1	1
1000010000000000000	1	1
11001000000000000000	−1	2
10000000000000000	−1	1
11000000000000000000	−3	2
−10000000000000000000	−1	1
100000000000000000000	1	1
0		

Half−Gcd

10011111011101101101

11110111100010011100

1er appel recursif

$$2^{-5}\begin{bmatrix} -16 & 44 \\ 28 & -13 \end{bmatrix}$$

1ere multiplication

100000100101000100000

10010111111000000

10000111001100000000

2e appel recursif

$$2^{-3}\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

2e multiplication

11110001110000000000

10010101100000000000 11

Un exemple, suite

	q	n
10011111011101101101		
11110111100010011100	−3	2
−11010001100001000	−1	1
100000100101000100000	1	2
100110111110000000	1	2
100001110011000000000	3	2
11110001110000000000	−1	1
10010101100000000000	−1	1
10100111000000000000	−1	1
10000100000000000000	1	1
11001000000000000000	−1	2
10000000000000000	−1	1
11000000000000000000	−3	2
−10000000000000000000	−1	1
10000000000000000000	1	1
0		

Fast−Gcd

10011111011101101101

11110111100010011100

Half−Gcd

$$\rightarrow \quad 2^{-10}\begin{bmatrix} 680 & 562 \\ 628 & 1023 \end{bmatrix}$$

11110001110000000000

10010101100000000000 11

Half−Gcd

$$\rightarrow \quad 2^{-5}\begin{bmatrix} 24 & 4 \\ -22 & 39 \end{bmatrix}$$

11001000000000000000

10000000000000000 16

etc.

Pourquoi les quotients sont-ils corrects ?

Résultat 1 : Soient a, b, a' et b' tels que :

$$a' = a \bmod 2^l \quad \text{et} \quad b' = b \bmod 2^l,$$

avec $l \geq 2\nu(b) + 1$. Supposons que $0 = \nu(a) < \nu(b)$.
Soient $(q, r) =$ **Div-Bin**(a, b) et $(q', r') =$ **Div-Bin**(a', b').

Alors : $$q = q' \quad \text{et} \quad r = r' \bmod 2^{l-\nu(b)}.$$

Pourquoi les quotients sont-ils corrects ?

Résultat 2 : Soient a, b, a' et b' tels que :

$$a' = a \bmod 2^{2k+1} \quad \text{et} \quad b' = b \bmod 2^{2k+1},$$

avec $k \geq 0$. Supposons que $0 = \nu(a) < \nu(b)$.
Soient $r_0 = a$, $r_1 = b$, r_2, ... la suite des restes de (a, b),
et $q_1, q_2, \ldots$ celle des quotients.
Soient $r'_0 = a'$, $r'_1 = b'$, r'_2, ... la suite des restes de (a', b'),
et $q'_1, q'_2, \ldots$ celle des quotients.

Si r_{i+1} est le premier t.q. $\nu(r_{i+1}) > k$, alors pour tout $j \leq i$:

$$q_j = q'_j \quad \text{et} \quad r_{j+1} = r'_{j+1} \bmod 2^{2k+1-\nu(r_j)}.$$

Taille des matrices renvoyées

- Pire cas ($n \geq 8$) : $\forall i$, $q_i = \pm 1$ et $\nu(r_{i+1}) = \nu(r_i) + 1$.
- Similarité avec le pire cas pour la division standard (Fibonacci).
- Soient a et b avec $0 = \nu(a) < \nu(b)$.
  Si M est la matrice des quotients qui "fait gagner n bits",
  les coefficients de M ont au plus $n(1 + \log \frac{1+\sqrt{17}}{4}) \approx 1.36 \cdot n$ bits.
- $\Longrightarrow$ Au plus $n / \log \frac{\sqrt{17}-1}{2} \approx 1.56 \cdot n$ quotients
  ($1.44 \cdot n$ pour la division "standard").

Complexité asymptotique de l'algorithme

- $H_n = 2H_{\frac{n}{2}+1} + O(M(n))$.
- $F_n = H_n + F_{\alpha n} + O(M(n))$, avec $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \log \frac{1+\sqrt{17}}{4}) < 1$.
- D'où : $F_n, H_n = O(M(n) \log n))$.

- Estimation heuristique du $O()$:
  1) tous les quotients sont petits.
  2) une matrice qui fait gagner k bits a des coefficients de taille $\approx k$.

$$\Longrightarrow \quad G_n \approx \frac{17}{4} M(n) \log n.$$

Optimisations pratiques

- Calculer plusieurs petits quotients à la fois pour “remplir” un mot machine, en n’utilisant que deux mots machines des restes.
- Dans **Half-Gcd**, renvoyer les restes courants en plus de la matrice.
- Lors des appels à **Half-Gcd** au sommet de la récursion, ne renvoyer que les restes courants.
- Pour Karatsuba et Toom-Cook, changer **Half-Gcd** pour annuler γn bits au lieu de $n/2$ (avec γ à optimiser).

Benchmarks

"F_n" : Test avec les Fibonacci consécutifs F_{n-1} et F_n.

"G_n" : Idem pour un pire cas de la division binaire.

type, n	Magma V2.10-12	Mathematica 5.0	Fast-GB-gcd (GNU MP)
F_n, 10^6	2.89	2.11	0.70
F_n, $2 \cdot 10^6$	7.74	5.46	1.91
F_n, $5 \cdot 10^6$	23.3	17.53	6.74
F_n, 10^7	59.1	43.59	17.34
G_n, $5 \cdot 10^5$	2.78	2.06	0.71
G_n, 10^6	7.99	5.30	1.94